Mathematik 1 für BI, MB, WIMB, UI und VT

Prüfer: Gabriel Maresch

Prüfung am 14.10.2022

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, D ...
  Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- In den meisten Fällen sollte der freie Platz am Angabeblatt jeweils für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung.

  Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	20	22	20	18	20	100
erreicht						

Aufgabe I . . . . *20 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Ermitteln Sie alle reellen Teiler des Polynoms $x^4 - x^3 + x^2 - x$ und argumentieren Sie, warum es keine weiteren geben kann.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Die Polynomdivision liefert zu gegebenen Polynomen $p(x)$ und $q(x)$, zwei weitere Polynome $f(x)$ und $r(x)$:

$$p(x) = q(x)f(x) + r(x).$$

Was läßt sich <u>allgemein</u> über die Grade der Polynome f und r sagen? Geben Sie entweder den genauen Grad bzw. eine obere Schranke an!

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil C) Von besonderem Interesse ist $p_n(x, y) = (x - y)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen allgemeinen Ausdruck für p_n an, in welchem nur mehr Konstanten und *Binome*, d.h. Terme der Form $x^i y^j$ vorkommen. Erklären Sie dabei alle von Ihnen verwendeten Symbole.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Verwenden Sie Ihre Formel aus (C), um für passend gewähltes $x = \ldots$ und $y = \ldots$ die Potenz 99^5 explizit und ohne Taschenrechner zu berechnen!

Aufgabe II .... *22 Punkte*

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil A) Zeigen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl dass für $q \neq 1$ und $N \in \mathbb{N}$ folgende Identität gilt:

$$\sum_{n=1}^{N} n \cdot q^n = \frac{1}{(1-q)^2} \left(q - (N+1)q^{N+1} + Nq^{N+2} \right).$$

$\boxed{\text{10 P.}}$ (Teil B) Untersuchen Sie die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n$$

entweder mit Quotienten- oder Wurzelkriterium auf Konvergenz: Geben Sie alle $q \in \mathbb{R}$ an, für die die Reihe absolut konvergiert, alle $q \in \mathbb{R}$ für die die Reihe bedingt, aber nicht absolut konvergiert und alle $q \in \mathbb{R}$ für die die Reihe divergiert.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Für jene $q \in \mathbb{R}$, für die Sie in Teil (B) Konvergenz festgestellt haben gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{(1-q)^2} \left(q - (N+1)q^{N+1} + Nq^{N+2} \right).$$

Berechnen bzw. vereinfachen Sie den Grenzwert auf der rechten Seite so weit, wie möglich.

Aufgabe III .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to W$ mit $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}$. Wie muss man W wählen, damit f surjektiv ist?

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Ist $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to W$ aus Teil (A) umkehrbar? Wenn ja, geben Sie die Umkehrfunktion (inkl. deren Defintions- und Wertebereich) an; wenn nein, argumentieren Sie, warum eine Umkehrfunktion nicht existiert.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Was bedeutet es für eine reelle Funktion „monoton" zu sein? Geben Sie eine exakte Definition.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Ist gemäß Ihrer Definition aus Teil (C) die Funktion f aus Teil (A) monoton? Wenn ja, geben Sie an, ob f monoton fallend oder steigend ist und rechnen Sie nach, dass die Definition auch tatsächlich erfüllt ist, wenn nein, bringen Sie ein explizites Gegenbeispiel.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil E) Die Funktion f aus Teil (A) ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig. Wieso?

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil F) Die Funktion f aus Teil (A) besitzt weder Minimum, noch Maximum. Wieso ist das kein Widerspruch zum Satz vom Maximum für stetige Funktionen?

Aufgabe IV .... *18 Punkte*

$\boxed{8\text{ P.}}$ (Teil A) Um zu entscheiden, ob es eine *stetige* Funktion $f : (-\frac{1}{2}, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x) + \ln(1-x)}{x}$ für $x \neq 0$ gibt, ist es naheliegend, die Regel von de L'Hospital zu verwenden. Beantworten Sie folgende Fragen:

(i). Welche Voraussetzungen sind für die Regel von de L'Hospital notwendig?

(ii). Warum sind diese hier erfüllt?

(iii). Welcher Grenzwert ist hier zu berechnen?

(iv). Gibt es nun eine solche stetige Funktion f oder nicht? Falls ja: wie lautet $f(0)$?

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil B) Wie lautet die Potenzreihendarstellung von $g(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$? Wie lautet der genaue Konvergenzbereich?

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil C) Geben Sie die Koeffizienten a_n der Potenzreihendarstellung der Funktion f aus Teil (A) um $x_0 = 0$.

Aufgabe V .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Sei F eine Stammfunktion von f und ϕ eine differenzierbare Funktion. Geben Sie eine Stammfunktion von $x \mapsto f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$ an und führen Sie die Probe durch Differenzieren aus!

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $p(x) = e^{-x^2} \cdot x$.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Wie ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot x \, dx$$

definiert? Konvergiert es gegen einen endlichen Wert? Wenn ja, geben Sie diesen an; wenn nein, begründen Sie, warum es keinen gibt.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil D) Berechnen Sie die Untersumme $U(f; \mathcal{Z})$ und die Obersumme $O(f; \mathcal{Z})$ für die Funktion $f(x) = \sin^2 x$ und die Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} < \pi$ des Intervalls $[0, \pi]$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.